

数学1 A

第1問 (配点20)

[1]

(1) 不等式 $|2x + 1| \leq 3$ の解は $アイ \leq x \leq ウ$ である。

以下、 a を自然数とする。

(2) 不等式

$$|2x + 1| \leq a$$

の解は

$$\frac{-エ - a}{オ} \leq x \leq \frac{-エ + a}{オ}$$

である。

(3) 不等式 (1) を満たす整数 x の個数を N とする。 $a = 3$ のとき、 $N = カ$ である。また、 a が $4, 5, 6, \dots$ と増加するとき、 N が初めて $カ$ より大きくなるのは $a = キ$ のときである。

[2] k を定数とする。自然数 m, n に関する条件 p, q, r を次のように定める。

$p : m > k$ または $n > k$

$q : mn > k^2$

$r : mn > k$

(1) 次のクに当てはまるものを下の0～3のうちから一つ選べ。 p の否定 \bar{p} はクである。

0 : $m > k$ または $n > k$

1 : $m > k$ かつ $n > k$

2 : $m \leq k$ かつ $n \leq k$

3 : $m \leq k$ または $n \leq k$

(2) 次のケ～サに当てはまるものを、下の0～3のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

(i) $k=1$ とする。

p は q であるためのケ。

(ii) $k=2$ とする。

p は r であるためのコ。

p は q であるためのサ。

0 : 必要十分条件である。

1 : 必要条件であるが、十分条件ではない

2 : 十分条件であるが、必要条件でない

3 : 必要条件でも十分条件でもない

答え

[1] (1)

$$|2x + 1| \leq 3 \text{ より}$$

$$-3 \leq 2x + 1 \leq 3$$

$$-4 \leq 2x \leq 2$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 1$$

(2)

$$a \leq |2x + 1| \leq a, a > 0 \text{ より}$$

$$-1 - a \leq 2x \leq -1 + a$$

$$\therefore \frac{-1 - a}{2} \leq x \leq \frac{-1 + a}{2} \dots (2)$$

(3)

$$a=3 \text{ のとき、(2) より } -2 \leq x \leq 1$$

$$\text{これを満たす整数 } x \text{ の個数 } N \text{ は } N=4(x=-2,-1,0,1)$$

$$a=4 \text{ のとき、(2) より } -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ となり、} N=4(x=-2,-1,0,1)$$

$$a=5 \text{ のとき、(2) より } -3 \leq x \leq 2 \text{ となり、} N=6(x=-3,-2,-1,0,1,2)$$

よって、 N が初めて 4 より大きくなるのは、 $a=5$ のときである。

[2] (1) ド・モルガンの法則より

$$\bar{p} : m > k \text{ かつ } n > k \Leftrightarrow m \leq k \text{ かつ } n \leq k (2)$$

(2)

(i) $k=1$ のとき

$$p : m > 1 \text{ または } n > 1$$

$$q : mn > 1$$

まず $p \Rightarrow q$ の真偽を調べる。 $m > 1$ であるとする

$$mn > n (\because m > 1)$$

$$\geq 1 (n \text{ は自然数だから})$$

$$\therefore mn > 1$$

$n > 1$ のときも同様だから $p \Rightarrow q$ は真である。

次に $q \Rightarrow p$ の真偽を調べる。そのためには $q \Rightarrow p$ の対偶である $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ の真偽を調べればよい。

$$\bar{p} : m \leq 1 \text{ かつ } n \leq 1$$

$$\bar{q} : mn \leq 1$$

m, n は自然数であることを考慮すると

$$\bar{p} : m = 1 \text{ かつ } n = 1$$

$$\bar{q} : mn = 1$$

である。よって $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ は真である。すなわち $q \Rightarrow p$ は真である。

以上より p は q であるための必要十分条件である。(0)

(ii) $k=2$ のとき

$p: m > 2$ または $n > 2$

$q: mn > 4$

$r: mn > 2$

$p \Rightarrow r$ の真偽を調べる。 $m > 2$ であるとする

$mn > 2n (\because m > 2)$

$\geq 2(n \text{ は自然数だから})$

$\therefore mn > 2$

$n > 2$ のときも同様だから、 $p \Rightarrow r$ は真である。

$r \Rightarrow p$ の真偽を調べる。 $m=2, n=2$ は r を満たすが p を満たさないから $r \Rightarrow p$ は偽である。

以上より、 p は r であるための十分条件であるが、必要条件でない。(2)

$p \Rightarrow q$ の真偽を調べる。 $m=3, n=1$ は p を満たすが q を満たさないから、 $p \Rightarrow q$ は偽である。

$q \Rightarrow p$ の真偽を調べる。 そのためには $q \Rightarrow p$ の対偶である $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ の真偽を調べればよい。

$\bar{p}: m \leq 2$ かつ $n \leq 2$

$\bar{q}: mn \leq 4$

より、 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ は真である。 ゆえに $q \Rightarrow p$ は真である。

以上より、 p は q であるための必要条件であるが、十分条件でない。(1)